

1. $\frac{1}{x^2+7x-18}$ কে আংশিক ভঙ্গাংশে প্রকাশ কর।

সম্পাদনা: $\frac{1}{x^2+7x-18} = \frac{1}{x^2+9x-2x-18} = \frac{1}{x(x+9)-2(x+9)} = \frac{1}{(x+9)(x-2)}$

সুতরাং, $\frac{1}{(x+9)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+9} + \frac{B}{x-2} \dots\dots (i)$

(i) নং-এর উভয় পক্ষ $(x+9)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে -

$$1 \equiv A(x-2) + B(x+9) \dots\dots (ii)$$

(ii) নং-এ $x=2$ বসিয়ে পাই,

$$1 \equiv A(2-2) + B(2+9)$$

$$\Rightarrow 1 = B \cdot 11$$

$$\therefore B = \frac{1}{11}$$

আবার, (ii) নং-এ $x=-9$ বসিয়ে পাই,

$$1 = A(-9-2) + B(-9+9)$$

$$\Rightarrow 1 = A \cdot (-11)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{11}$$

A ও B এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{(x+9)(x-2)} \equiv \frac{-1}{11(x+9)} + \frac{1}{11(x-2)} = \frac{1}{11} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+9} \right) \text{ (Ans)}$$

2. $\frac{5x-12}{x^2-5x+6}$ কে আংশিক ভঙ্গাংশে প্রকাশ কর।

সম্পাদনা: $\frac{5x-12}{x^2-5x+6} = \frac{5x-12}{x^2-3x-2x+6} = \frac{5x-12}{x(x-3)-2(x-3)} = \frac{5x-12}{(x-3)(x-2)}$

সুতরাং, $\frac{5x-12}{(x-3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \dots\dots (i)$

(i) নং-এর উভয় পক্ষ $(x-3)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$5x - 12 \equiv A(x-2) + B(x-3) \text{ ----- (ii)}$$

① নং-এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$5 \times 2 - 12 = A(2-2) + B(2-3)$$

$$\Rightarrow -2 = -B$$

$$\therefore B = 2$$

আবার, ① নং-এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$$5 \times 3 - 12 = A(3-2) + B(3-3)$$

$$\Rightarrow 3 = A$$

$$\therefore A = 3$$

∴ A ও B এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই-

$$\frac{5x-12}{(x-3)(x-2)} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x-2} \text{ (Ans)}$$

3. $\frac{x}{(x+2)(x^2-1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: $\frac{x}{(x+2)(x^2-1)} = \frac{x}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

সুতরাং, $\frac{x}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \text{ ----- (i)}$

(i) নং-এ উভয়পক্ষে $(x+2)(x+1)(x-1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x \equiv A(x+1)(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)(x+1) \text{ ----- (ii)}$$

① নং-এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$-2 = A(-2+1)(-2-1) + B(-2+2)(-2-1) + C(-2+2)(-2+1)$$

$$\Rightarrow -2 = A(-1)(-3)$$

$$\Rightarrow -2 = 3A$$

$$\therefore A = -\frac{2}{3}$$

আমরা, $x = -1$ বসিয়ে পাই (ii) নং থেকে

$$-1 = A(-1+1)(-1-1) + B(-1+2)(-1-1) + e(-1+2)(-1+1)$$

$$\Rightarrow -1 = B \times 1(-2)$$

$$\Rightarrow -1 = -2B$$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$

আমরা, (ii) নং $x = 1$ বসিয়ে পাই -

$$1 = A(1+1)(1-1) + B(1+2)(1-1) + e(1+2)(1+1)$$

$$\Rightarrow 1 = e \times 3 \times 2$$

$$\Rightarrow 1 = 6e$$

$$\therefore e = \frac{1}{6}$$

A, B, e - এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই -

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)(x-1)} \equiv \frac{-2}{3(x+2)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{6(x-1)} \quad \text{(Ans)}$$

4.

$\frac{x^y+1}{x(x-2)^y}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধানঃ
ধরি,

$$\frac{x^y+1}{x(x-2)^y} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^y} \quad \text{--- (i)}$$

(i) নং-এর উভয় পক্ষে $x(x-2)^y$ দ্বারা গুণ করে পাই -

$$x^y+1 \equiv A(x-2)^y + Bx(x-2) + ex \quad \text{--- (ii)}$$

(ii) নং-এ $x = 0$ বসিয়ে পাই -

$$0+1 = A(0-2)^y + B \times 0(0-2) + e \times 0$$

$$\Rightarrow 1 = A \times 4$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}$$

આચાર્ય, ⑩ નર-૨ $x = 2$ સમિત્તે પાઠે -

$$2^x + 1 = A(2-x)^x + B \times 2(2-x) + C \times 2$$

$$\Rightarrow 5 = 2C$$

$$\therefore C = \frac{5}{2}$$

આચાર્ય, ⑪ નર-૨૦ હેતુ પદ ૨૦ x^x ૨૦ સરવાળા મનોહૃત કાઢી પાઠે,

$$1 = A + B$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + B$$

$$\Rightarrow B = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow B = \frac{4-1}{4}$$

$$\therefore B = \frac{3}{4}$$

⑫ નર-૨ A, B, C ૨૦ જ્ઞાન સમિત્તે પાઠે -

$$\frac{x^x + 1}{x(x-2)^x} \equiv \frac{1}{4x} + \frac{3}{4(x-2)} + \frac{5}{2(x-2)^x} \quad \text{Ans}$$

5. દેખાઈ (સ, $\frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \frac{1+2+3+4}{5} + \dots = \frac{1}{2} e$

અચાર્યકાન: સમિત્તે, $S = \frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \frac{1+2+3+4}{5} + \dots$

સમિત્તે n -તમ પદ, $t_n = \frac{1+2+3+4+\dots+n}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)}$

$$= \frac{n}{2} = \frac{n}{2n(n-1)} = \frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1}$$

n ૨૦ પદોમાં 1, 2, 3 ... સેતુતિ સમિત્તે પાઠે,

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1} = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$$

$$t_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$t_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

সমাধান, $S = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} e$$

(showned)

6. $(2x - \frac{3}{x})^{21}$ এর বিস্তৃতিতে x -এর সহজ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বিস্তৃতিতে x -এর সহজ বা $(r+1)$ তম পদ

$$= (-1)^r \cdot 21 C_r (2x)^{21-r} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^r$$

$$= (-1)^r \cdot 21 C_r \cdot 2^{21-r} \cdot x^{21-r} \cdot 3^r \cdot x^{-r}$$

$$= (-1)^r \cdot 21 C_r \cdot 2^{21-r} \cdot 3^r \cdot x^{21-2r}$$

যদি, $(r+1)$ তম পদে x আছে,

$$\therefore x^{21-2r} = x$$

$$\Rightarrow 21 - 2r = 1$$

$$\Rightarrow 21 - 1 = 2r$$

$$\Rightarrow 2r = 20$$

$$\therefore r = 10$$

$$\therefore x \text{ এর সহজ} = (-1)^{10} \cdot 21 C_{10} \cdot 2^{21-10} \cdot 3^{10}$$

$$= 21 C_{10} \cdot 2^{11} \cdot 3^{10} \quad (\text{Ans})$$

7. প্রমাণ কর যে, $(1 - 5x + 6x^2)^{-1}$ -এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহজ $3^{n+1} - 2^{n+1}$

সমাধান: $(1 - 5x + 6x^2)^{-1} = \frac{1}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 2x - 3x + 6x^2}$

$$= \frac{1}{1(1-2x) - 3x(1-2x)} = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$$

$$= \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} \quad [\text{আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর}]$$

$$= 3(1-3x)^{-1} - 2(1-2x)^{-1}$$

$$= 3\{1+3x+(3x)^2+\dots+(3x)^n+\dots\} - 2\{1+2x+(2x)^2+\dots+(2x)^n+\dots\}$$

$$= 3(1+3x+3^2x^2+\dots+3^nx^n+\dots) - 2(1+2x+2^2x^2+\dots+2^nx^n+\dots)$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n$$

$$= 3^{1+n} - 2^{1+n}$$

$$\therefore x^n \text{ अंश } 2 \cdot 3^{n+1} - 2^{n+1} \quad (\text{सिद्धांत})$$

8. यदि $y = f(x) = \frac{lx+m}{nx-l}$ हो, तब (दोषांत रत्न, $f(f) = x$)

प्रमाणीतः $y = f(x) = \frac{lx+m}{nx-l}$

$$\therefore y = \frac{lx+m}{nx-l}$$

$$\Rightarrow nxy - ly = lx + m \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{अथ } f(x) = \frac{lx+m}{nx-l}$$

$$\therefore f(y) = \frac{ly+m}{ny-l}$$

(1) नए प्रमाणीतः इतः पाठे,

$$nxy - ly = lx + m$$

$$\Rightarrow nxy - lx = ly + m$$

$$\Rightarrow x(ny-l) = ly+m$$

$$\Rightarrow x = \frac{ly+m}{ny-l}$$

$$\Rightarrow x = f(y)$$

$$\therefore f(f) = x \quad (\text{दोषांत रत्न})$$

9. $f(x) = e^x + e^{-x}$ হলে, দেখাও যে, $f(x+y) \times f(x-y) = f(2x) + f(2y)$

সমাধানে: (দেখা আছে,

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f(x+y) = e^{x+y} + e^{-(x+y)}$$

$$f(x-y) = e^{x-y} + e^{-(x-y)}$$

$$f(2x) = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$f(2y) = e^{2y} + e^{-2y}$$

L.H.S

$$f(x+y) \times f(x-y)$$

$$= \{e^{x+y} + e^{-(x+y)}\} \{e^{x-y} + e^{-(x-y)}\}$$

$$= e^{x+y} \cdot e^{x-y} + e^{x+y} \cdot e^{-(x-y)} + e^{-(x+y)} \cdot e^{x-y} + e^{-(x+y)} \cdot e^{-(x-y)}$$

$$= e^{x+y+x-y} + e^{x+y-x+y} + e^{-x-y+x-y} + e^{-x-y-x+y}$$

$$= e^{2x} + e^{2y} + e^{-2y} + e^{-2x}$$

$$= e^{2x} + e^{-2x} + e^{2y} + e^{-2y}$$

$$= f(2x) + f(2y)$$

$$= R.H.S$$

\therefore L.H.S = R.H.S (shown)

10. যদি $f(x) = \log \sin x$ এবং $\phi(x) = \log \cos x$ হয়, তাহা দেখাও যে,

$$e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$$

সমাধানে: (দেখা আছে, $f(x) = \log \sin x$ এবং $\phi(x) = \log \cos x$

$$f(a) = \log \sin a$$

$$\phi(a) = \log \cos a$$

$$\phi(2a) = \log \cos 2a$$

L.H.S

$$e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)}$$

$$= e^{2 \log \cos a} - e^{2 \log \sin a}$$

$$= e^{\log \cos^2 a} - e^{\log \sin^2 a}$$

$$= \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= \cos 2a$$

$$\frac{\text{R.H.S}}{e^{\phi(2a)}}$$

$$= e^{\log \cos 2a}$$

$$= \cos 2a$$

$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$ (shown)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$ का मान निर्धारण करें।

समाधान: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{x(\sqrt{1-x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x})^2 - (1)^2}{x(\sqrt{1-x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-0} + 1}$$

$$= \frac{-1}{1+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \text{ (Ans)}$$

12. Lt $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ এর মান কত?

সমাধান: Lt $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \text{Lt}_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x/2}{x^2} = \text{Lt}_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4}$

$$= \text{Lt}_{x \rightarrow 0} 2 \times 1 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ (Ans)}$$

13. x এর সাহায্যে অন্তরক সমতা নির্ণয় করুন $\sin 2x$

সমাধান: বিধি, $f(x) = \sin 2x$

$$\therefore f(x+h) = \sin 2(x+h) = \sin(2x+2h)$$

সহজানুসারে, $\frac{d}{dx} [f(x)] = \text{Lt}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} [\sin 2x] = \text{Lt}_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin 2x}{h}$$

$$\left[\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \right] = \text{Lt}_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{2x+2h+2x}{2} \cdot \sin \frac{2x+2h-2x}{2}}{h}$$

$$= \text{Lt}_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x+h) \cdot \sin h}{h}$$

$$= \text{Lt}_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x+h)}{1} \cdot \text{Lt}_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= 2 \cos(2x+0) \cdot 1$$

$$= 2 \cos 2x \text{ (Ans)}$$

14. $(x^x)^x$

সমাধান: বিধি, $y = (x^x)^x = x^{x^2}$

$$\Rightarrow \log y = \log x^{x^2} = x^2 \log x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (\log y) = \frac{d}{dx} (x^2 \log x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 2x \quad \left[\frac{d}{dx} (UV) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x + \log x \cdot 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x(1 + 2 \log x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy(1 + 2 \log x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x \cdot x^{x^2} (1 + 2 \log x) \quad (\text{Ans})$$

15. x^{x^x}

সমাধান: বিধি, $y = x^{x^x}$

$$\Rightarrow \log y = \log x^{x^x}$$

$$\Rightarrow \log y = x^x \log x$$

সুতরাং \log নিয়ে পারে -

$$\log(\log y) = \log(x^x \log x)$$

$$\Rightarrow \log(\log y) = \log x^x + \log(\log x)$$

$$\Rightarrow \log(\log y) = x \log x + \log(\log x)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাহায্যে অন্তরীকরণ করে পারে,

$$\frac{1}{\log y} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\log x} \cdot \log x \cdot 1 + \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y \log y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \log x + \frac{1}{x \log x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \log y \left(1 + \log x + \frac{1}{x \log x} \right)$$

$$= x^{x^x} \cdot x^x \log x \left(1 + \log x + \frac{1}{x \log x} \right) \quad (\text{Ans})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{x^x} \cdot x^{x^x \log x} (\log x + 1) + \frac{1}{x} \quad (\text{Ans})$$

16. $y = x^x$ বক্ররেখার $(1, 1)$ -বিন্দুতে ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = x^x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$(1, 1) \text{ বিন্দুতে ঢাল } m = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(1,1)} = 2x = 2 \cdot 1 = 2$$

17. $y = \sin^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$y = \sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow y_1 \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$\Rightarrow y_1^2 (1-x^2) = 1 \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\Rightarrow 2y_1 y_2 (1-x^2) + y_1^2 (-2x) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 \{ 2y_2 (1-x^2) - y_1 2x \} = 0$$

$$\Rightarrow 2y_2 (1-x^2) - y_1 2x = 0$$

$$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 = 0 \quad [\text{২ দ্বারা ভাগ করে}]$$

(প্রমাণিত)

18. $\cos\sqrt{y} = x$ বা $y = (\cos^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2$

সমাধান: $\cos\sqrt{y} = x$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \cos^{-1}x$$

$$\Rightarrow y = (\cos^{-1}x)^2$$

$$\Rightarrow y_1 = -2 \cos^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow y_1^2 = \frac{4 (\cos^{-1}x)^2}{1-x^2} \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\Rightarrow y_1^2 (1-x^2) = 4 (\cos^{-1}x)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 (1-x^2) = 4y \quad [\because \cos^{-1}x = \sqrt{y}]$$

$$\Rightarrow (1-x^2) 2y_1 y_2 + y_1^2 (-2x) = 4y_1$$

$$\Rightarrow 2y_1 \{ (1-x^2)y_2 - xy_1 \} = 4y_1$$

$$\therefore (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2$$

(shown)

19. $\sin\sqrt{y} = x$ বা $y = (\sin^{-1}x)^2$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$

সমাধান: $\sin\sqrt{y} = x$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow y = (\sin^{-1}x)^2$$

$$\Rightarrow y_1 = 2\sin^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow y_1(\sqrt{1-x^2}) = 2\sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4(\sin^{-1}x)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 4y$$

$$\Rightarrow (1-x^2) \cdot 2y_1 y_2 + y_1^2(-2x) = 4y_1$$

$$\Rightarrow 2y_1 \{ (1-x^2)y_2 - xy_1 \} = 4y_1$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2 \text{ (showed)}$$

20. যদি $u = x^y + y^z + z^x$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $u_x + u_y + u_z = (x+y+z)^y$

সমাধান: দেওয়া আছে, $u = x^y + y^z + z^x$

$$\therefore u_x = 2xy + z^x$$

$$u_y = x^y + 2yz$$

$$u_z = y^z + 2zx$$

L.H.S

$$u_x + u_y + u_z$$

$$= 2xy + z^x + x^y + 2yz + y^z + 2zx$$

$$= x^y + y^z + z^x + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$= (x+y+z)^y$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S} \text{ (showed)}$$

21. $u = x^y + 2xy + y^z$ হলে, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ এর মান কত?

সমাধান: $u = x^y + 2xy + y^z$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + 2x \cdot 1 + 2y = 2x + 2y$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 2 \cdot 1 = 2 \text{ (Ans)}$$

22. যদি $V = x^2 + y^2 + z^2$ হয়, তবে দেখাও যে, $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 6$

সমাধানে: (দেওয়া আছে,

$$V = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow V_x = 2x$$

$$\therefore V_{xx} = 2$$

অনুরূপভাবে, $V_{yy} = 2$ and $V_{zz} = 2$

L.H.S

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz}$$

$$= 2 + 2 + 2$$

$$= 6$$

$$= R.H.S$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ (shown)

23. যদি $u = \log(x^2 + y^2 - 2xy)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

অথবা $u_x + u_y = 0$

সমাধানে: $u = \log(x^2 + y^2 - 2xy)$

$$\Rightarrow u = \log(x - y)^2$$

$$\text{or } u = 2 \log(x - y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot \frac{1}{x - y} \cdot 1 = \frac{2}{x - y}$$

$$\text{and } \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \cdot \frac{1}{x - y} (-1) = \frac{-2}{x - y}$$

L.H.S

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{2}{x - y} - \frac{2}{x - y}$$

$$= 0$$

$$= R.H.S$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ (proved)

24. $\int \frac{\tan(\log x)}{x} dx$ को मान निर्धारण करें।

समाधान: $\int \frac{\tan(\log x)}{x} dx$

माना, $z = \log x$

$$= \int \tan z \, dz$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$= \log \sec z + C$$

$$\Rightarrow dz = \frac{dx}{x}$$

$$= \log \sec(\log x) + C \quad (\text{Ans})$$

25. $\int \frac{(\tan^{-1} x)^v}{1+x^2} dx$

समाधान: $\int \frac{(\tan^{-1} x)^v}{1+x^2} dx$

माना, $z = \tan^{-1} x$

$$= \int z^v \, dz$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{z^{v+1}}{v+1} + C$$

$$\Rightarrow dz = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{3} z^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} (\tan^{-1} x)^3 + C \quad (\text{Ans})$$

26. $\int \frac{\sec^v x \, dx}{\sqrt{1+\tan x}}$

समाधान: $\int \frac{\sec^v x \, dx}{\sqrt{1+\tan x}}$

माना, $z = 1 + \tan x$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{z}} \, dz$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sec^2 x$$

$$= \int z^{-1/2} \, dz$$

$$\therefore dz = \sec^2 x \, dx$$

$$= \frac{z^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C$$

$$= 2\sqrt{z} + C$$

$$= \frac{z^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= 2\sqrt{1+\tan x} + C \quad (\text{Ans})$$

27. $\int (1 + \cos x)^5 \sin x \, dx$

अवस्थापन: $\int (1 + \cos x)^5 \sin x \, dx$

$$= \int (z)^5 (-dz)$$

$$= -\int z^5 \, dz$$

$$= -\frac{z^{5+1}}{5+1} + c$$

$$= -\frac{z^6}{6} + c$$

$$= -\frac{1}{6} (1 + \cos x)^6 + c \quad (\text{Ans})$$

माना,

$$z = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\sin x$$

$$\Rightarrow dz = -\sin x \, dx$$

$$\therefore -dz = \sin x \, dx$$

28. $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} \, dx$

अवस्थापन: $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} \, dx$

$$= \int \frac{1}{z} (-dz)$$

$$= -\int \frac{1}{z} \, dz$$

$$= -\log z + c$$

$$= -\log \log(\cos x) + c \quad (\text{Ans})$$

माना,

$$z = \log(\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos x} (-\sin x)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\tan x$$

$$\therefore -dz = \tan x \, dx$$

29. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$ का मान निर्णय करें।

अवस्थापन: $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot 2 \cos^4 x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} [x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] + \frac{1}{4} [\sin 2x \cdot \frac{\pi}{2} - \sin 0]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} [0 - 0] = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Ans})$$

30. $\int_0^{\pi/4} \cos x \sin^3 x \, dx$ अणु ज्ञान-निर्णय करुन ।

समाधान: $\int_0^{\pi/4} \cos x \sin^3 x \, dx$

$$= \int_0^{\pi/4} z^3 \, dz$$

$$= \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^4$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{16} \text{ (Ans)}$$

सिद्धि,

$$z = \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \cos x$$

$$\therefore dz = \cos x \, dx$$

x	0	$\pi/4$	$\pi/4$
z	0	z	$1/\sqrt{2}$

31. $\int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)^{-1} \sin x \, dx$ अणु ज्ञान-निर्णय करुन ।

समाधान: $\int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)^{-1} \sin x \, dx$

$$= \int_2^1 z^{-1} (-dz)$$

$$= - \int_2^1 z^{-1} \, dz$$

$$= - \frac{1}{3} [z^3]_2^1$$

$$= - \frac{1}{3} (1^3 - 2^3)$$

$$= - \frac{1}{3} (1 - 8)$$

$$= \frac{7}{3} \text{ (Ans)}$$

सिद्धि,

$$z = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\sin x$$

$$\therefore dz = -\sin x \, dx$$

$$x = 0 \quad z = 2, \quad z = 2$$

$$x = \pi/2 \quad z = 1, \quad z = 1$$

32.

$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$$= \int_2^3 \frac{1}{z} dz$$

$$= [\log z]_2^3$$

$$= \log 3 - \log 2$$

$$= \log \frac{3}{2} \text{ (Ans)}$$

ধরি,

$$1+e^x = z$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{dz}{dx} \Rightarrow dz = e^x dx$$

$$x = \log 2 \text{ (ম), } z = 1+e^{\log 2}$$

$$= 1+2$$

$$= 3$$

$$x = 0 \text{ (ম), } z = 1+e^0$$

$$= 1+1$$

$$= 2$$

33.

$\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^3}{1+x^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^3}{1+x^2} dx$

$$= \int_0^{\pi/4} z^3 dz$$

$$= \frac{1}{3} [z^3]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\pi}{4} \right)^3 - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\pi^3}{4^3}$$

$$= \frac{\pi^3}{192} \text{ (Ans)}$$

ধরি,

$$z = \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore dz = \frac{1}{1+x^2} dx$$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

" $x = 1$ " $z = \frac{\pi}{4}$

34.

$\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে, \vec{A} ও \vec{B} এর মাত্রিক

অনুভবিকার একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান: ভেক্টর দুটির মাত্রিক, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore R = |\vec{R}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

\vec{R} ভেক্টরের অনুভবিকার একক ভেক্টর = $\frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{7}$ (Ans)

35. $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ এই দুই ভেক্টর দুটির লম্বিত্ব সম্বন্ধ জানা অক্ষয় ভেক্টর তৈরি কর।

সমাধান: $\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$
 $= 7\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$

$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{7^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{49 + 36 + 36} = \sqrt{121} = 11$

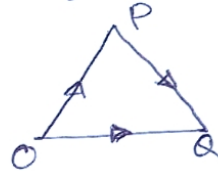
\therefore নির্ণয় অক্ষয় ভেক্টর $= \frac{7\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}}{11} = \frac{7}{11}\hat{i} + \frac{6}{11}\hat{j} - \frac{6}{11}\hat{k}$

36. যদি P এবং Q এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $5\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ হয় তবে PQ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: যদি, O মূলবিন্দু

$\therefore \vec{OP} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

এবং $\vec{OQ} = 5\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$



$\therefore \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

$= 5\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$= 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore |\vec{PQ}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$ (Ans)

37. x এর কোন মানের জন্য $x\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2x\hat{i} + x\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান: ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, এদের ডট গুণফল 0 হবে।

অর্থাৎ $(x\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2x\hat{i} + x\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 0$

$\Rightarrow x(x-2) + 1(x-2) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

অথ, $x-2 = 0$ অথবা $x+1 = 0$

$\therefore x = 2$

$\therefore x = -1$

\therefore নির্ণয় মান $x = 2$ বা -1

(Ans)

38. $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, \vec{B} এর উপর \vec{A} এর লম্ব অঙ্কন নির্মাণ কর।

সমাধান: \vec{B} উপর \vec{A} এর লম্ব অঙ্কন = $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \vec{A} \cdot \vec{B} &= (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \\ &= 2 - 6 + 12 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\therefore \vec{B} \text{ এর উপর } \vec{A} \text{ এর লম্ব অঙ্কন} = \frac{8}{3} \text{ (AW)}$$

39. $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j}$ হলে $\vec{A} \cdot \vec{B}$ এর মান কত?

সমাধান: $\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - \hat{j})$

$$\begin{aligned} &= 8 - 3 - 0 \\ &= 5 \text{ (AW)} \end{aligned}$$

40. $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$, $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$, m এর মান কত হলে \vec{A} ও \vec{B} ভেক্টর দুটি লম্ব হবে?

সমাধান: ভেক্টর দুটি লম্ব হলে,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow (3\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 3 \cdot m + 3 \cdot 2 - 6 \cdot 10 = 0$$

$$\Rightarrow 3m + 6 - 60 = 0$$

$$\Rightarrow 3m - 54 = 0$$

$$\Rightarrow 3m = 54$$

$$\therefore m = 18 \text{ (AW)}$$

41. $x^2 + xy + y^2 = 0$ মধ্যস্থ পথের $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$x^2 + xy + y^2 = 0$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2y) \frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + y)}{x + 2y}$$

$$\therefore (2, -2) \text{ বিন্দুতে ঢাল, } \frac{dy}{dx} = \frac{-(2 \times 2 - 2)}{2 - 2 \times 2} = \frac{-(4 - 2)}{2 - 4} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad (\text{Ans})$$

42. $y = 2^x + \sqrt{4 - 2^x}$ বক্ররেখার যে-এক বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর-মস্ত তলের সূচনাঙ্ক হবে কত।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ,

$$y = 2^x + \sqrt{4 - 2^x} \quad \text{--- (i)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^x + \frac{1}{2\sqrt{4 - 2^x}} \times \frac{d}{dx}(4 - 2^x)$$

$$= 2^x + \frac{1}{2\sqrt{4 - 2^x}} \times (-2^x) = 2^x - \frac{2^x}{\sqrt{4 - 2^x}} = \frac{2^x \sqrt{4 - 2^x} - 2^x}{\sqrt{4 - 2^x}}$$

$$= \frac{2^x \{2\sqrt{4 - 2^x} - 1\}}{\sqrt{4 - 2^x}}$$

যেহেতু স্পর্শক x অক্ষের উপর-মস্ত,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2^x \{2\sqrt{4 - 2^x} - 1\}}{\sqrt{4 - 2^x}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 - 2^x} = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 2^x = 0$$

$$\Rightarrow 2^x = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

① এর সমীকরণ $2^x = 4$ এর মান
সমীকরণ -

$$\text{যখন } x = 2, \text{ তখন } y = 2^2 + \sqrt{4 - 2^2} = 4$$

$$\text{যখন } x = -2 \text{ তখন } y = (-2)^2 + \sqrt{4 - (-2)^2} = 4 + 0 = 4$$

নির্ণেয় বিন্দু সূচনাঙ্ক $(2, 4)$ $(-2, 4)$ (Ans)